Soluzione di equazioni differenziali a coefficienti costanti

a) Lineari del primo ordine a coefficienti costanti

Data l'equazione differenziale:

$$y'(x) + a\,y(x) = b$$

dove:

$y\ (x)$ = funzione incognita

a, b = costanti note

la sua soluzione generale e':

$$y(x) = p + q\,x + t\exp(-a\,x)$$

con:

$$\begin{cases} p = b/a \\ q = 0 \end{cases} \qquad \text{se } a \neq 0$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = b \end{cases} \qquad \text{se } a = 0$$

t = parametro il cui valore puo' essere scelto in maniera del tutto arbitraria

b) Lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Data l'equazione differenziale:

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = c$$

dove:

$y\ (x)$ = funzione incognita

a, b, c = costanti note

la sua soluzione generale e':

$$y(x) = p + q\,x + r\,x^2 + t\exp\left(-\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}x\right) + u\exp\left(-\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}x\right) \qquad \text{quando } a^2 > 4\ b$$

$$y(x) = p + q\,x + r\,x^2 + (t + u\,x)\exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \qquad \text{quando } a^2 = 4\ b$$

$$y(x) = p + q\,x + r\,x^2 + \left[t\cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right) + u\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)\right]\exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \qquad \text{quando } a^2 < 4\,b$$

con:

$$\begin{cases} p = c/b \\ q = 0 \\ r = 0 \end{cases} \qquad \text{se } b \neq 0$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = c/a \\ r = 0 \end{cases} \qquad \text{se } b = 0,\ a \neq 0$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \\ r = c/2 \end{cases} \qquad \text{se } b = 0,\ a = 0$$

t, u = parametri i cui valori possono essere scelti in maniera del tutto arbitraria

Soluzione di equazioni differenziali lineari del primo ordine

Data l'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

dove:

$y\ (x)$ = funzione incognita

$g(x)$, $h(x)$ = funzioni note

la sua soluzione generale e':

$$y(x) = \left\{\alpha + \int dx\, h(x) exp[G(x)]\right\} exp[-G(x)]$$

con:

α = costante arbitraria

$G(x) = \int dx\, g(x)$ = una primitiva qualsiasi della funzione $g(x)$